### 円筒座標系

円筒座標系におけるリーマン計量，基底ベクトル，勾配，発散，回転などを計算してみよう (図 6.12 参照).

$$x=\rho\cos\phi,\quad y=\rho\sin\phi,\quad z=z$$

であるから，$(q_1,q_2,q_3)=(\rho,\phi,z)$ とする．$x,y,z$ の全微分は

$$dx=\frac{\partial x}{\partial\rho}d\rho+\frac{\partial x}{\partial\phi}d\phi+\frac{\partial x}{\partial z}dz$$
$$=\cos\phi d\rho-\rho\sin\phi d\phi$$
$$dy=\sin\phi d\rho+\rho\cos\phi d\phi$$
$$dz=dz$$

なので，$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$ は,

$$(ds)^2=(\cos\phi d\rho-\rho\sin\phi d\phi)^2+(\sin\phi d\rho+\rho\cos\phi d\phi)^2+(dz)^2$$
$$=(d\rho)^2+\rho^2(d\phi)^2+(dz)^2$$

となる．リーマン計量 $g_{ij}$ は

$$(ds)^2=\sum_{ij}g_{ij}dq_idq_j$$

で定義されている．表記を簡単にするために，$g_{ij}$ を $g_{\rho\rho},g_{\rho\phi},g_{\rho z}$ などと記すと，

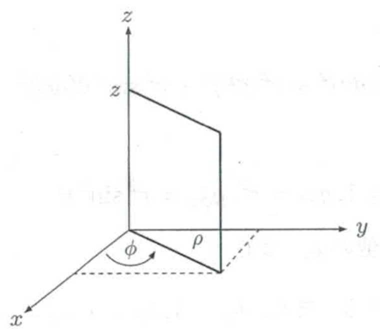


図 6.12



$$g_{\rho\rho}=1,\quad g_{\phi\phi}=\rho^2,\quad g_{zz}=1$$

他は 0

である．したがって，直交座標系であり，基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\phi,\boldsymbol{e}_z$ は直交する．また，$h_i=\sqrt{g_{ii}}$ より

$$h_\rho=1,\quad h_\phi=\rho,\quad h_z=1$$

となる．直交系の場合，基底ベクトルは $\boldsymbol{e}_i=\dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_i}$ となるから，

$$\boldsymbol{e}_\rho=\frac{1}{h_\rho}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\rho}=\left(\frac{\partial x}{\partial\rho},\frac{\partial y}{\partial\rho},\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)=(\cos\phi,\sin\phi,0)$$
$$\boldsymbol{e}_\phi=\frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi}=\frac{1}{\rho}(-\rho\sin\phi,\rho\cos\phi,0)=(-\sin\phi,\cos\phi,0)$$
$$\boldsymbol{e}_z=\frac{1}{h_z}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z}=(0,0,1)$$

であり，$\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\phi,\boldsymbol{e}_z$ は右手系となる．$h_i$ や，勾配，発散，回転，ラプラシアンなどの表式を以下にまとめる．

$$h_\rho=1,\quad h_\phi=\rho,\quad h_z=1 \tag{6.43}$$
$$\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi+\frac{\partial\psi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{6.44}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}A_\phi+\frac{\partial}{\partial z}A_z \tag{6.45}$$
$$\nabla^2\psi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{6.46}$$
$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A}&=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z\end{vmatrix}\\&=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho+\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{e}_\phi\\&\quad+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi)-\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right)\boldsymbol{e}_z,\end{aligned} \tag{6.47}$$
$$\nabla^2\boldsymbol{A}=(\nabla^2\boldsymbol{A})_\rho\boldsymbol{e}_\rho+(\nabla^2\boldsymbol{A})_\phi\boldsymbol{e}_\phi+(\nabla^2\boldsymbol{A})_z\boldsymbol{e}_z, \tag{6.48}$$

$$(\nabla^2 \boldsymbol{A})_\rho = \nabla^2 A_\rho - \frac{1}{\rho^2}A_\rho - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \tag{6.49}$$

$$(\nabla^2 \boldsymbol{A})_\phi = \nabla^2 A_\phi - \frac{1}{\rho^2}A_\phi + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \tag{6.50}$$

$$(\nabla^2 \boldsymbol{A})_z = \nabla^2 A_z \tag{6.51}$$

前節で直接的計算により極座標系における勾配等の表式を求めたが，一般的な公式からそれらを導いてみよう．

### 極座標系

極座標系は，円筒座標系で $z$ 成分を無視したものに他ならない．したがって，円筒座標系での式で，$\rho \to r, \phi \to \theta$ とし，スカラーやベクトルの $z$ 成分依存性はないとする．ただし，回転は，$z$ 成分のみとなる．すると，次のようになる．

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r \tag{6.52}$$

$$\nabla\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta \tag{6.53}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}A_\theta \tag{6.54}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \tag{6.55}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{A} &= \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{e}_z,\end{aligned} \tag{6.56}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = (\nabla^2 \boldsymbol{A})_r\boldsymbol{e}_r + (\nabla^2 \boldsymbol{A})_\theta\boldsymbol{e}_\theta, \tag{6.57}$$

$$(\nabla^2 \boldsymbol{A})_r = \nabla^2 A_r - \frac{1}{r^2}A_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \tag{6.58}$$

$$(\nabla^2 \boldsymbol{A})_\theta = \nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2}A_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \tag{6.59}$$

前節で求めた極座標における勾配，発散，ラプラシアン，回転の結果 (6.10), (6.15), (6.16), (6.18) は，これらと一致することが分かる．



### 球座標系

球座標系におけるリーマン計量，基底ベクトル，勾配，発散，回転などを計算してみよう (図 6.13 参照)．

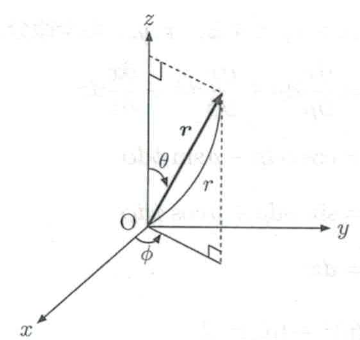


図 6.13

座標変換の式および全微分は，

$$\begin{aligned} &x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta, \\ &dx = \sin\theta\cos\phi dr + r\cos\theta\cos\phi d\theta - r\sin\theta\sin\phi d\phi, \\ &dy = \sin\theta\sin\phi dr + r\cos\theta\sin\phi d\theta + r\sin\theta\cos\phi d\phi, \\ &dz = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \end{aligned}$$

となるので，$(ds)^2$ は

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(d\phi)^2$$

となる．したがって，

$$g_{rr} = 1, g_{\theta\theta} = r^2, g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta$$

その他の $g_{ij}$ は 0

となるので，直交座標系である．また，$h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r\sin\theta$ であり，基底ベクトルは，

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{1}{h_r}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta),$$

$$e_\theta = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta),$$
$$e_\phi = \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$$

となり，$(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi)$ は右手系となる．したがって，$h_i$ や，勾配，発散，回転，ラプラシアンなどの表式は以下のようになる．

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r\sin\theta \tag{6.60}$$

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi \tag{6.61}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\ A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}A_\phi \tag{6.62}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \tag{6.63}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta\ A_\phi\end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\boldsymbol{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right)\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_\phi\end{aligned} \tag{6.64}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = (\nabla^2\boldsymbol{A})_r\boldsymbol{e}_r + (\nabla^2\boldsymbol{A})_\theta\boldsymbol{e}_\theta + (\nabla^2\boldsymbol{A})_\phi\boldsymbol{e}_\phi, \tag{6.65}$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_r = \nabla^2A_r - \frac{2}{r^2}A_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin\theta}A_\theta - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}, \tag{6.66}$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_\theta = \nabla^2A_\theta - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}, \tag{6.67}$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_\phi = \nabla^2A_\phi - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\phi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}. \tag{6.68}$$

第 7 章

# フーリエ級数とフーリエ変換

この章では，フーリエ級数やフーリエ変換について学ぶ．これらは，第 8 章で偏微分方程式を解く際にも用いられる．まず，基本的な定理を記す[1)]．それを具体的な問題に適用することで，フーリエ展開やフーリエ変換の応用方法を学ぶ．

## 7.1 フーリエ級数

$\sin x$ や $\cos x$ は，$2\pi$ の周期をもつ周期関数である．また，$n$ を自然数として，$\sin(nx)$ や $\cos(nx)$ は $\dfrac{2\pi}{n}$ の周期をもつ周期関数であるから，これらも $x$ が $2\pi$ 変化するともとの値に戻る．周期 $2\pi$ の実数値関数 $f(x)$ を次のようにこれらの三角関数で表すことを考えよう．

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos(2x) + b_2\sin(2x) + \cdots \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)).\end{aligned} \tag{7.1}$$

ここで，$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots$ は実定数で，**フーリエ係数**とよばれる．右辺は，一般には無限級数となり，**フーリエ級数**とよばれるが，その収束性が問題となる．

(7.1) のように表すことのできる条件はあとで述べることにして，フーリエ係数を求めてみよう．まず，$m, n$ が自然数 $(m, n = 1, 2, \cdots)$ のとき，次式が成り立つことが分かる．

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)dx = 0, \tag{7.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)dx = 0, \tag{7.3}$$

1) 証明は巻末の参考書を参照のこと．